Übungen zur Vorlesung Vielteilchenphänomene für Materialphysiker und Lehrämtler

Sommersemester 2012, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 1 - Abgabetermin: Donnerstag, 26.5.2012, in der Vorlesung

Präsenzübungen

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

1. Zur Gaußverteilung: Gegeben sei die gaußförmige Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = \mathcal{N} e^{-Cx^2}$.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}$

(b) Was ist $\langle x^2 \rangle$? Drücken Sie also die Konstante C durch $\langle x^2 \rangle$ aus.

(c) Diskutieren Sie die "Breite" der Gaußglocke. Z.B. kann man fragen: Wann ist $\rho(x) = \rho(0)/2$? [und dann ist $\delta x_{\mathrm{FWHM}} \equiv 2x$].

(d) Jetzt betrachten Sie eine dreidimensionale Gaußverteilung $\rho(\vec{v}) = \mathcal{N} e^{-C\vec{v}^2}$. Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den *Betrag* der Geschwindigkeit, also $\tilde{\rho}(v) \equiv P(|\vec{v}| \in [v, v + dv])$?

(e) Zeigen Sie: Wenn gelten soll $m \langle v_x^2 \rangle /2 \equiv k_B T/2$, dann muß die Verteilung von der Form $\rho(v_x) \sim e^{-\frac{\frac{1}{2} m v_x^2}{k_B T}}$ sein.

(f) Zahlen: Es sei $\langle v_x^2 \rangle = \left(10^3 \frac{m}{s}\right)^2$ für ein Gas von Atomen. Wie gering ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung gefunden wird $v_x = 10^6 \frac{m}{s} \pm dv_x$, *im Vergleich* zur Wahrscheinlichkeit, dass man eine eher typische Geschwindigkeit wie $v_x = 10^3 \frac{m}{s} \pm dv_x$ misst?

Hausaufgabe

2. Boltzmannverteilung im vorgegebenen Potential

Betrachten Sie die potentielle Energie $V(x)$, mit $V(x) = 0$ für $0 < x < a$, $V(x) = V_0 > 0$ für $a \leq x < b$, und $V(x) = \infty$ überall sonst (also für $x \leq 0$ und $x \geq b$). Skizzieren Sie das Potential!

(a) Wir betrachten nun ein Gas von Teilchen, die sich nur entlang dieser eindimensionalen Koordinate x bewegen. Jedes Teilchen spürt die gerade angegebene potentielle Energie. Eine sehr schwache Wechselwirkung sorgt dafür, dass dieses Gas ins thermische Gleichgewicht gelangt, bei einer vorgegebenen Temperatur T. Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$, ein gegebenes Teilchen bei der Stelle x zu finden, für die folgenden vier Fälle: $T = 0$, $T = \infty$, $k_B T = V_0$ und $k_B T \gg V_0$ (aber $T < \infty$).

(b) Berechnen Sie die Normierungskonstante in $\rho(x) = \mathcal{N} e^{-V(x)/k_B T}$.

(c) Zeichnen Sie die Trajektorie eines Teilchens im Raum-Zeit-Diagramm (x, t), wenn es bei $x = 0$ startet und (i) recht schnell ist ($mv^2/2 > V_0$) oder (ii) zu langsam ist ($mv^2/2 < V_0$). Erklären Sie sich daraus, weshalb die Teilchendichte für den Bereich $a < x < b$ reduziert ist.