Theorie 3: Vielteilchenphänomene

Sommersemester 2012
Dozent: F. Marquardt
Blatt 9, Abgabe: 21.6.2012

Präsenzaufgabe

Weißer Zwerg

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen sehr alten Stern in einer der möglichen Endphasen seines Sternenlebens. Der Stern kann dabei nicht mehr Energie durch Fusion erzeugen und besteht aus N Elektronen und den dazugehörigen vollständig ionisierten Ionenrümpfen (überwiegend besteht der weiße Zwerg aus Sauerstoff und Kohlenstoff, so dass $M_{\text{Ionen}} = 2m_pN$ mit der Protonenmasse m_p). Die Gravitationskräfte zwischen den Ionen wollen den Stern zusammenziehen, was der Entartungsdruck der fermionischen Elektronen verhindert.

Wir wollen ein einfaches Modell eines solchen Sterns betrachten, indem wir die relevanten Energien grob (bis auf numerische Vorfaktoren) abschätzen:

a) Die Gesamtenergie der Elektronen kann zunächst über die Fermienergie (nichtrelativistischer) Elektronen abgeschätzt werden. Nehmen Sie dabei eine konstante Dichteverteilung der Elektronen über den Sternradius R an. Da $E_F \gg k_BT$ können wir $T = 0$ annehmen.

b) Die Gravitationsenergie werde durch $E_{\text{Grav}} \sim -GM_{\text{Ionen}}^2/R$ abgeschätzt. Skizzieren Sie die Gesamtenergie und finden Sie den Sternradius aus deren Minimum. Wie verhält sich der Sternradius für zunehmende Masse des Sterns?

c) Für kleinen Sternradius nimmt die Fermienergie (die kinetische Energie) der Elektronen so stark zu, dass relativistische Effekte wichtig werden. Wir nehmen daher jetzt die ultrarelativistische Dispersionrelation der Elektronen (ultrarelativistisch: für $p \gg m_ec$) $\varepsilon \approx pc = \hbar kc$ an.

Vollziehen Sie dieselben Schritte wie in a) und b). In Abhängigkeit von der Gesamtmasse des Sterns finden Sie nun $R \to \infty$ (dann gilt wieder das nichtrelativistische Ergebnis von oben) oder einen kollabierenden Stern, $R \to 0$, wenn die Masse einen gewissen Schwellenwert übersteigt. Finden Sie diese maximale Masse (die sog. Chandrasekhar-Masse) eines weissen Zwerges.

Hausaufgabe

Bosonen in zwei Dimensionen

In der Vorlesung wird gezeigt, dass es in drei Dimensionen im Grenzfall tiefer Temperaturen zur Bose-Einstein Kondensation kommt. Dabei kann die Normierungsbedingung für die Teilchenzahl nur erfüllt werden, indem der Einteilchengrundzustand einen endlichen Prozentsatz aller Teilchen aufnimmt ('makroskopische Besetzung'). Wir betrachten nun als Kontrastbeispiel den zweidimensionalen Raum:

a) Betrachten Sie den Integralausdruck für die Teilchenzahl in zwei Dimensionen. Finden Sie das dimensionslose Integral I_{2D}, so dass

$$N = \frac{L^2}{\lambda_{\text{th}}^2} \cdot I_{2D} \,.$$

(Zwischenergebnis: $I_{2D} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{-\beta\mu}e^x - 1}$.)

Da $\lambda_{\text{th}} \to \infty$ für $T \to 0$ muss I_{2D} ebenfalls divergieren, wenn der gesamte Ausdruck für die Teilchenzahl N endlich bleiben soll. Daher wollen wir zunächst zeigen, dass I_{2D} für $\beta\mu = 0$ tatsächlich divergiert.

b) Skizzieren Sie den Integranden für kleines (aber endliches) $\beta\mu < 0$. Das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x finden Sie durch Entwicklung um $x = \beta\mu$.

c) Die Divergenz des Integrals für $\beta\mu \to 0$ wird durch das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x bestimmt für die obige Entwicklung gültig ist. Leiten Sie aus dieser Überlegung die Abhängigkeit des Integrales von $\beta\mu$ her, indem Sie das Integral am unteren Rand auswerten.
(Zwischenergebnis: $I_{2D} \approx -\ln(-\beta\mu)$.)

d) Wie muss nun μ von der Temperatur abhängen, damit die Teilchenzahl N für $T \to 0$ konstant bleibt?